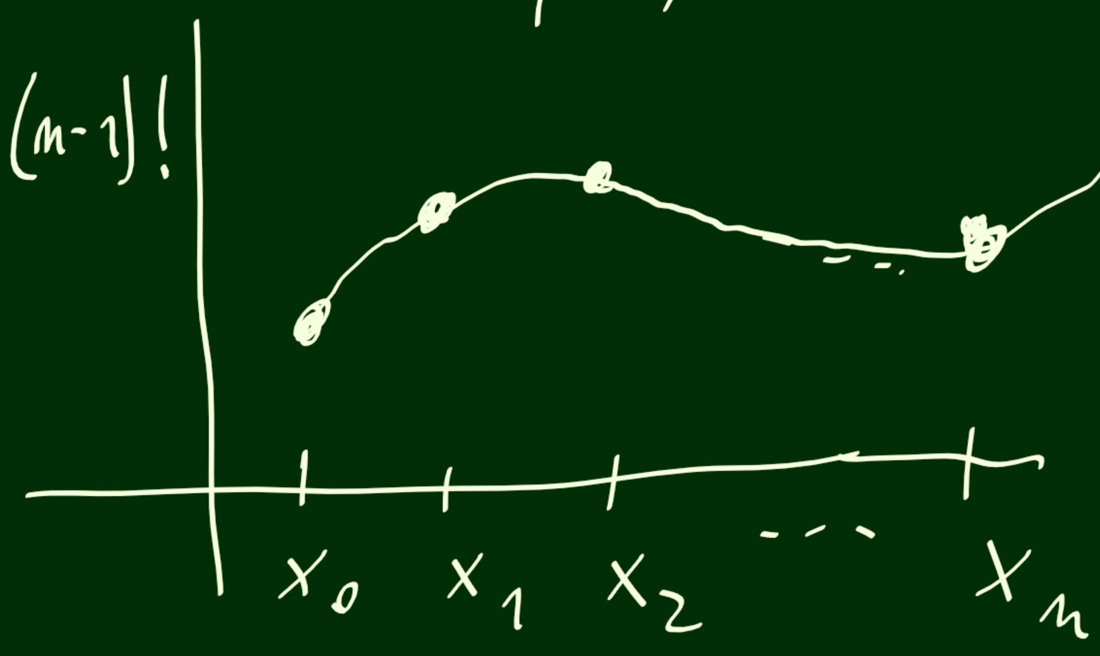
Interpolace funkcí: Cíl: Aproximovat složité funkce jednoduššími, s dobrou přesností

- $f \in C[a,b]$ určena ∞-mnoho konstantami, nahradím konečným – polynomy
- Taylorův polynom – nefunguje dál od bodu, řada Taylorovy, vyšší derivace.

Nejmenší čtverce:

- My: f známe v konečně mnoha bodech (uzly) $x_0, \dots, x_n \longrightarrow$ polynom

Př: • Výpočet funkcí složitých: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$, $\Gamma(n) = (n-1)!$



- f dána tabulkou
- –||– měřením
- mapy – terén, vrstevnice.
- sčítání lidu v USA
- D/A
- rekonstrukce obrázku
- animace – inbetweening.

Lagrangeova interpolace: $P_n = \{\text{polynomy st.} \le n\}$

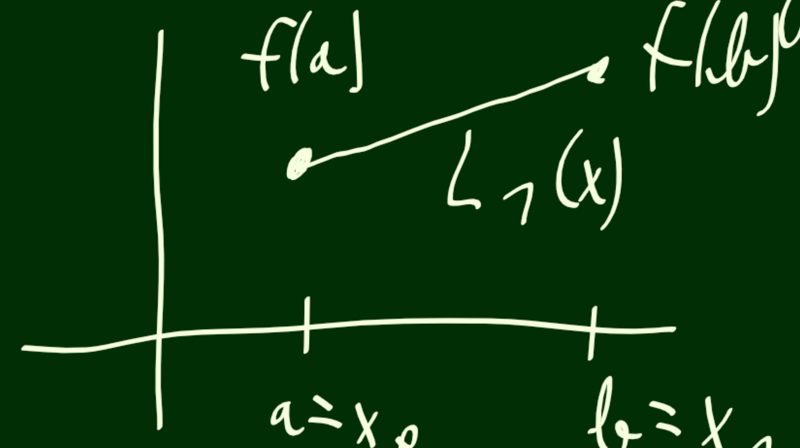
Úloha: Dáno $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, uzly $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b$.

Hledám $L_n \in P_n$: $L_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Def: L_n interpoluje f v uzlech $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

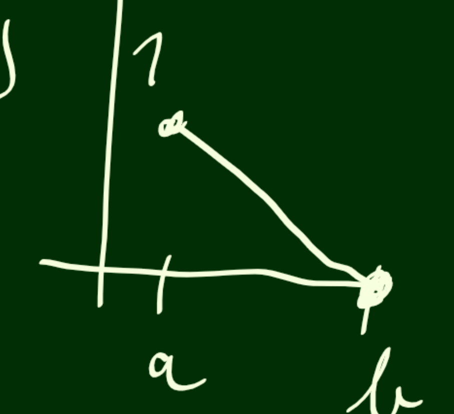
Pozn: L_n určeno $n+1$ koeficienty, $n+1$ podmínek. Mohl bych napsat soustavu lin. alg. rovnic

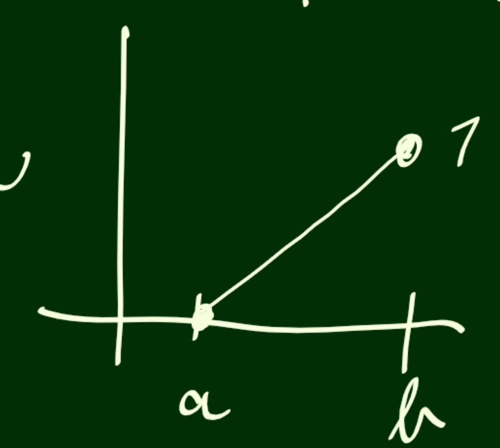
Př: P_1: L_1



$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

– lin. kombinace $f(a)$, $f(b)$.





obecně: chci $l_i \in P_n$ – bázové funkce

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

Def: $$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \ne i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$l_i(x_i) = \prod_{k \ne i} \frac{\cancel{(x_i - x_k)}}{\cancel{(x_i - x_k)}} = 1$$

$$l_i(x_j) = 0, \quad i \ne j.$$

Lemma: Pro l_i platí $l_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Věta: Dána f, uzly $\{x_i\}_{i=0}^n$ jako výše. Pak $\exists!\, L_n \in P_n$ interpolující f v uzlech $\{x_i\}_{i=0}^n$, platí: $L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$

Dk: • $L_n \in P_n$, $L_n(x_j) = f(x_j)$.

• Jednoznačnost: Sporem: Nechť $\exists$ dva $L_n \neq \tilde{L}_n$, $L_n(x_i) = \tilde{L}_n(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow L_n - \tilde{L}_n \in P^n$ má $n+1$ různých kořenů $x_0, x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow L_n - \tilde{L}_n \equiv 0$ ↯

Def: L_n = Lagrangeův interpolační polynom.

Věta (odhad chyby, Cauchy): Nechť $f \in C^{n+1}[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ uzly, L_n = Lagrangeův interp. polynom. Pak $\forall x \in [a,b]\ \exists \xi_x \in [a,b]$:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Dk: • Pokud $x = x_i$ pro nějaké i: $0 = 0$.

• Nechť $x \neq x_i\ \forall i$: Zafixuji x.

• Pomocná fce $g(t) = f(t) - L_n(t) - (f(x) - L_n(x)) \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$.

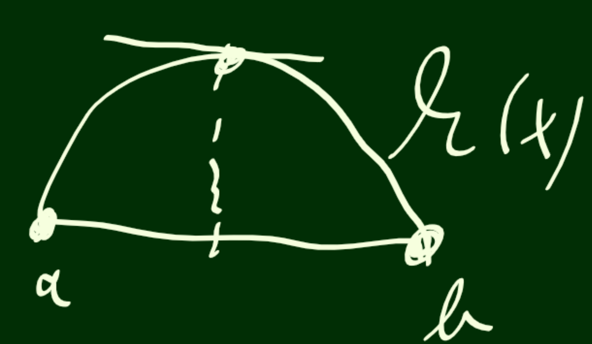
• $\boxed{g(x_k) = \underbrace{f(x_k) - L_n(x_k)}_{=0} - (f(x) - L_n(x)) \prod_{i=0}^n \underbrace{\frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)}}_{=0 \text{ pro } i=k} = 0}$

• $\boxed{g(x) = f(x) - L_n(x) - (f(x) - L_n(x)) \underbrace{\prod_{i=0}^n \cancel{\frac{(x - x_i)}{(x - x_i)}}}_{=1} = 0}$

• $g(t)$ má $n+2$ různých kořenů $x_0, \dots, x_n, x$. Navíc $g \in C^{n+1}[a,b]$

Rolle $\Rightarrow g'(t)$ má $n+1$ různých kořenů

$\Rightarrow g''(t)$ má n různých kořenů



$\vdots$

$g^{(n+1)}(t)$ má 1 kořen v $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \xi_x \in [a,b]: g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - \underbrace{\cancel{L_n^{(n+1)}(\xi_x)}}_{=0} - (f(x) - L_n(x)) \prod_{i=0}^n \frac{1}{(x - x_i)} \underbrace{\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \Big(\underbrace{\prod_{i=0}^n (t - x_i)}_{= t^{n+1} + \text{členy nižšího řádu}} \Big)}_{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - (f(x) - L_n(x)) \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}}$$ — Přeuspořádám

Pozn: Lagrangův tvar zbytku Taylora je podobný $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x-a)$

Konvergence: $L_n \overset{?}{\to} f$ pro $n \to \infty$.

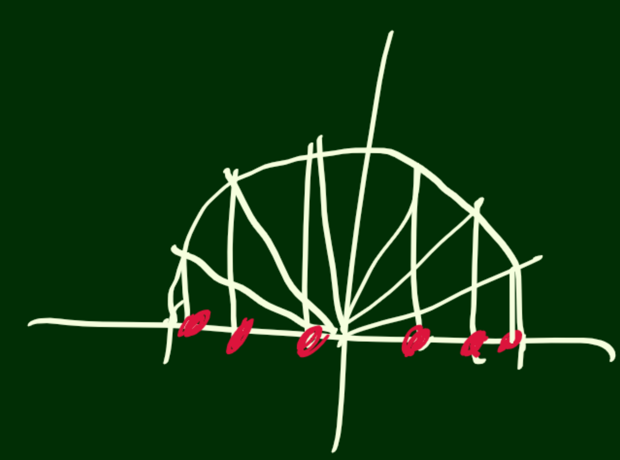
Př: Rungeho jev: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na $[-1,1]$, rovnoměrné dělení – diverguje, osciluje.
i když $f \in C^\infty[-1,1]$.

def $M = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$, Věta dává odhad $|L_n - f| \le \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{M \max \prod_{i=0}^{n} |x-x_i|}_{\text{pro Rungeho roste rychleji než } \frac{1}{(n+1)!}}$

f má póly v $\pm \frac{i}{5}$

Problém je, že člen $\prod_{i=0}^{n} |x-x_i|$ osciluje, blízko a,b nabývá velkých hodnot

Lepší volba: x_i = uzly Čebyševova polynomu
$\to \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ – na $[-1,1]$



pak $\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$ nejmenší možný ze všech monických polynomů

Čebyševova interpolace: V. $\forall f \in C^1[a,b]$, pak $L_n \rightrightarrows f$ stejnoměrně.

V. Lib. posl. uzlů $\Rightarrow \exists f \in C[a,b]$ diverguje s.v. v $[a,b]$.